Integrales definidas, análisis, números y experimentos

Victor Hugo Moll

Department of Mathematics, Tulane University, New Orleans, LA 70118, USA, vhm@math.tulane.edu.co

22 de marzo de 2007

Resumen. Este trabajo presenta una reflexión sobre los métodos simbólicos de evaluación de las integrales definidas. El énfasis yace en el descubrimiento de expresiones explícitas para tales integrales con la ayuda de un lenguaje simbólico. Varias relaciones con constantes especiales del Análisis y la Teoría de Números aparecen en la búsqueda de estas fórmulas explícitas. El trabajo también incluye una introducción a la teoría de transformaciones de Landen para integrales racionales.

Abstract. This work presents a discussion of symbolic methods employed in the evaluation of definite integrals. The emphasis is in the discovery of closed-form expressions for these integrals with the assistance of a symbolic language. Many relations with special constants of Analysis and Number Theory are also presented. The last part of the paper discusses the theory of Landen transformations for rational integrands.

Palabras y frases claves: Integrales, función zeta, transformaciones de Landen, valuaciones p-ádicas, recurrencias.

Clasificación matemática AMS : 33B15, 33E20, 33E20.

Índice

1. Introducción 2
1.1. El problema central 2
1.2. Otro tipo de respuestas 6
1.3. La constante de Euler 7
1.4. La constante de Catalan 9
1.5. La tabla de integrales de Gradshteyn y Ryzhik 11
2. La integral de una función racional cuártica 12
2.1. La fórmula de Wallis 12

2.2. Una integral que no aparece en Gradshteyn y Ryzhik 14
2.3. Propiedades aritméticas de los coeficientes 17
3. Landen 22
3.1. Extensión del cambio trigonométrico al grado 6 23
3.2. Una interpretación geométrica 27
3.3. Una generalización 28
3.4. El problema de la convergencia 30
Reconocimientos 34
Referencias 35

1. Introducción

Este artículo es la versión escrita de las notas que sirvieron de complemento al cursillo de *Integrales Definidas* dictado durante la *Semana de la Matemática* del mes de octubre de 2006. El evento fue organizado por el Instituto de Matemáticas de la Universidad Católica de Valparaíso (UCV), Chile. Mi propósito es comunicar lo que investigo con gran informalidad. Espero contar una historia matemáticamente interesante.

1.1. El problema central. Nos preocuparemos fundamentalmente del problema siguiente: Dada una función f, que depende de ciertos parámetros $p_1, \cdots, p_r$ y un intervalo $[a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, queremos determinar el valor de

$$I := \int_a^b f(x)\, dx \tag{1.1}$$

en función de los parámetros $\mathfrak{P} := \{a,\, b;\, p_1, \cdots, p_r\}$. Naturalmente, uno se pregunta qué significa *determinar*. Algunos ejemplos nos ayudan a aclarar la situación.

Ejemplo 1.1. En el primer curso de Cálculo, uno aprende que

$$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}. \tag{1.2}$$

Esta integral definida fue calculada por Arquímedes mucho antes que Newton, Leibnitz y Riemann. Aquí todo es simple : f es una *función polinómica* y la respuesta es un número *racional*.

Ejemplo 1.2. La Trigonometría nos enseña que

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}, \tag{1.3}$$

la cual se puede interpretar como un cuarto del área de un círculo de radio 1. Se observa que la integral de una función elemental como $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ produce numeros reales *complicados*. Los que no crean que π es un número *complicado*, deberían intentar calcular su dígito 10^{40}.

Ejemplo 1.3. La evaluación de

$$\int_0^{1/5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{5}\right) \tag{1.4}$$

se realiza mediante el cambio de variables $x = \sin t$. Ahora bien, ¿Cómo decidir si el valor $\text{Arcsin}\left(\frac{1}{5}\right)$ está escrito en la forma más simple?

Los ejemplos anteriores sugieren el siguiente principio: *Las integrales definidas de funciones elementales producen valores de funciones especiales.* Esto es muy vago. Uno debería explorar qué tipo de números reales aparecen cuando se calculan las integrales.

Ejemplo 1.4. No es preciso complicar mucho el integrando para producir números complicados. En verdad,

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi I_0(1), \tag{1.5}$$

donde

$$I_0(z) = J_0(\sqrt{-1}z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!^2}\left(\frac{z}{2}\right)^k \tag{1.6}$$

es la *función de Bessel de argumento imaginario*. A principios del siglo XX todos los matemáticos conocían estas funciones.

Ejemplo 1.5. Algunas veces uno tiene suerte. Por ejemplo,

$$\int_0^{\infty} \frac{xe^{-x}\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = 1 - \ln 2. \tag{1.7}$$

Cuando esto ocurre uno se pregunta: ¿Cómo puedo modificar el problema para obtener algo interesante? Un método posible es intentar escribir el integrando como un miembro de una familia de funciones que depende de un parámetro. Definamos pues

$$h(n) := \int_0^{\infty} \frac{x^n e^{-x}\,dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}. \tag{1.8}$$

Los tres primeros valores de estas integrales definidas son:

$$\begin{aligned}
h(1) &= 1 - \ln 2, \\
h(2) &= 2 - \frac{\pi^2}{12} - 2\ln 2 + (\ln 2)^2, \\
h(3) &= 6 - \frac{\pi^2}{4} - 6\ln 2 + \frac{1}{4}\pi^2 \ln 2 + 3(\ln 2)^2 - (\ln 2)^3 - \frac{3}{2}\zeta(3).
\end{aligned}$$

Esto sugiere que $h(n)$ es un polinomio con coeficientes racionales en las variables $\mathfrak{C} := \{\ln 2, \pi, \zeta(j) : j \in \mathbb{N}\}$, donde ζ es la *función zeta de Riemann*. Ésta se define por

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}. \tag{1.9}$$

El número real $\zeta(3)$ se conoce como *constante de Apery*. Debido a una conocida fórmula de Euler que expresa $\zeta(2j)$ en términos de los números de Bernoulli B_{2j}, sólo se necesita conocer los valores de esta función en los enteros impares. Sin embargo, las propiedades aritméticas de estos valores impares son difíciles. La comunidad matemática se sorprendió cuando Apery (1979) demostró que $\zeta(3)$ es irracional. Se sabe que uno de los cuatro números $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$es irracional. Se sospecha que todos los valores $\zeta(2j+1)$ son irracionales.

Una de las sugerencias que quiero hacer es la siguiente: *Uno debe pensar en ciertos numeros reales como variables.* El problema fundamental se reformula entonces como: Dada una integral

$$I = \int_a^b f(x)\, dx, \tag{1.10}$$

determinar un conjunto de variables que la determinan.

Debo advertir que el problema de la simplificación es realmente difícil. Por ejemplo, desde los tiempos de Euler, se sabe que los valores

$$a := \zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{y} \quad b = \pi^2 \tag{1.11}$$

satisfacen $b = 6a$. Sin embargo, nadie sabe si lo mismo ocurre para

$$c := \zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \text{ y } d = \pi^3. \tag{1.12}$$

De hecho, decidir si c/d es racional (o no) es un problema abierto.

Ejemplo 1.6 (Experimento)**.** El ejemplo anterior se puede estudiar con la ayuda de un experimento en Mathematica. Uno puede definir

```
h[n_]:=Integrate[x^n * Exp[-x]/Sqrt[Exp[2*x]-1],
{x, 0, Infinity}];
```

Los valores anteriores se obtienen empleando algunas reglas de simplificación como

```
h1[n_]:= FullSimplify[ h[n] ];
h2[n_]:=h[n]/.{ Log[4]-> 2* Log[2]} ;
```

Como estamos suponiendo que $h(n)$ es un polinomio en las variables

$$p = \pi,\ r = \ln 2,\ z(3),\ z(5),\ \cdots, \tag{1.13}$$

usamos la regla

```
q[n_]:= h2[n]/.{Log[2]->r, Pi->p, Zeta[j_]->z[j]}
```

El guión en la variable indica que cada vez que aparezca $\zeta(j)$ se debe reemplazar por $z[j]$. Uno puede pedir varios valores mediante el comando:

```
(n:=1) && While[n \leq 5, (Print[n, "    ", q[n]]; n++) ]
```

que entrega la lista

$$
\begin{array}{ll}
1 & 1-r \\
2 & 2-\dfrac{p^2}{12}-2r+r^2 \\
3 & 6-\dfrac{p^2}{4}-6r+\dfrac{p^2r}{4}+3r^2-r^3-\dfrac{3}{2}z[3] \\
4 & 24-p^2-\dfrac{3p^4}{80}-24r+p^2r+12r^2-\dfrac{p^2r^2}{2}-4r^3+r^4-6z[3]+6rz[3] \\
5 & 120-5p^2-\dfrac{3p^4}{16}-120r+5p^2r+\dfrac{3p^4r}{16}+60r^2-\dfrac{5p^2r^2}{2}-20r^3 \\
 & +\dfrac{5p^2r^3}{6}+5r^4-r^5-30z[3]+\dfrac{5p^2z[3]}{4}+30rz[3]-15r^2z[3]-\dfrac{45z[5]}{2}.
\end{array}
$$

Quizás el problema se simplifica eliminando los denominadores. Mathematica ayuda aquí también. El comando `q1[n_]:=Together[ q[n] ]` escribe $q(n)$ sobre un denominador común. Por ejemplo,

$$q_1(2) = \frac{1}{12}(24 - p^2 - 24r + 12r^2). \tag{1.14}$$

Más aún, el comando `den[n_]:= Denominator[q1[n]]` calcula el denominador de $q_1(n)$. Los diez primeros valores de la sucesión de denominadores son$\{1, 12, 4, 80, 48, 1344, 192, 11520, 1280, 11264\}$. Si queremos *intuir o predecir* una fórmula para estos datos necesitamos más valores. Los diez términos siguientes a partir de $den(11)$ son $\{3072,\ 372736,\ 14\ 3360,\ 7377280,\ 32,\ 4,\ 8,\ 8,\ 16, 8\}$. *Aquí hay algo raro.* Los próximos diez valores de la función *den* son $\{16, 16, 32, 8, 16, 16, 32, 16, 32, 32\}$ *Qué está pasando?*

Para ver esto en detalle. uno puede mirar el valor del polinomio $q_1(n)$, definido por la fórmula (1.13). *Hay una sorpresa.* Hasta $n = 14$, Mathematica entrega una expresión en las variables del problema. Pero, de $n = 15$ en adelante, algo nuevo aparece. Para escribir esto, usemos la notación

$$[x]_n := \underbrace{\{x,\ x,\ x, \cdots, x\}}_{\text{n veces}} \tag{1.15}$$

La respuesta que Mathematica entrega es

$$q_1(n) = a_n \,\text{HypergeometricPFQ}\left[\left\{\tfrac{1}{2}, [1]_{n+1}, [2]_{n+1}\right\}\right], \tag{1.16}$$

donde a_n es un numero racional. La función que aparece aquí es la *función hipergeométrica*, que se define por la serie de potencias

$$ {}_pF_q\left(a_1, \cdots, a_p; b_1, \cdots; x\right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k\,(a_2)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k\,(b_2)_k \cdots (b_p)_k}\,\frac{x^k}{k!}. \tag{1.17}$$

El problema se reduce a encontrar los números a_n y demostrar la fórmula. *Hasta aquí llego yo.*

1.2. Otro tipo de respuestas. Uno puede encontrar integrales que producen números interesantes.

Ejemplo 1.7 (Radicales)**.** Los radicales aparecen en las integrales de funciones racionales como

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^4+5x^2+1)^2} = \frac{2\pi}{7\sqrt{7}}. \tag{1.1}$$

Uno sospecharía (en forma correcta) que 2π proviene del Teorema del Residuo (que permite calcular integrales reales usando métodos de $\mathbb{C}$). En general,

$$g_m := \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^4+5x^2+1)^{m+1}} = \frac{\pi}{\sqrt{7}}\, j_m, \tag{1.2}$$

donde $j_m \in \mathbb{Q}$. Es posible encontrar una fórmula de recurrencia y un método numérico para calcular exactamente los j_m. Por ejemplo,

$$j_0 = \frac{1}{2},\; j_1 = \frac{2}{7},\; j_2 = \frac{171}{784},\; j_3 = \frac{2007}{10976}.$$

Esto es nuevo: se quiere un método numérico que dé una respuesta exacta (una buena aproximación no es suficiente). Esta parte es difícil y se llama *método LLL*. Se puede consultar en los libros de J. Borwein, D. Bailey y R. Girgensohn (2003) y (2004). También se debe mirar el diccionario de Borwein y Borwein (1990). Grandes desarrollos de las Matemáticas han surgido de un simple cálculo numérico.

Ejemplo 1.8 (Más radicales)**.** La integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^8+5x^6+2x^4+5x^2+1} = \frac{\pi}{140}\left(12\sqrt{7} - 7\sqrt{2}\right)$$

es parte de la familia

$$t_m := \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^8+5x^6+2x^4+5x^2+1)^{m+1}}.$$

Este valor se puede calcular porque el polinomio $P(t) = t^4 + 5t^3 + 2t^2 + 5t + 1$ se puede resolver por radicales y el denominador es $P(x^2)$.

La descomposición en fracciones parciales produce el resultado. Los cálculos son enormes.

1.3. La constante de Euler. Esta constante es el número real γ que corresponde a lo que $\zeta(1)$ debiera ser, si fuese finito. Ciertamente,

$$\zeta(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \tag{1.1}$$

y aunque Euler no parece preocuparse por los problemas modernos de convergencia, define

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n. \tag{1.2}$$

Aún no se sabe si $\gamma \in \mathbb{Q}$. Recientemente, J. Sondow (2003) ha desarrollado nuevos criterios que podrían decidir este problema.
Hay muchas integrales que producen esta constante, como por ejemplo

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \ln x \, dx = -\gamma. \tag{1.3}$$

Es decir, $\gamma = -\Gamma'(1)$, donde Γ es la función gama de Euler:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} \, dt. \tag{1.4}$$

Esta función es la extensión del factorial a los números reales ya que satisface $\Gamma(n+1) = n!$ para $n \in \mathbb{N}$. Dicha extensión es única si uno impone ciertas condiciones de convexidad. Los detalles se pueden ver en Boros y Moll (2004).
La variedad de integrales donde aparece γ es impresionante. Muchas de ellas aparecen en el libro clásico de Whittaker y Watson (1962). También hay colecciones en la Internet como las de Gourdon y Sebah, (2002) y (2003). He aquí una colección representativa de ellas:

$$\begin{aligned}
\gamma &= -\int_0^1 \ln(-\ln x) \, dx, \\
&= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} \, dx, \\
&= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x} \right) \frac{dx}{x}, \\
&= \int_0^{1} \left(x - \frac{1}{1-\ln x} \right) \frac{dx}{x \ln x}.
\end{aligned}$$

A veces uno encuentra un parámetro entero:

$$\gamma = \frac{1}{1-2^{-n}} \int_0^{\infty} \left(\exp(-x^{2^n}) - e^{-x} \right) \frac{dx}{x}. \tag{1.5}$$

Esta fórmula aparece bajo el número 3.475.3 en la tabla de integrales de I. S. Gradshteyn y I. M. Ryzhik (2000). También hay integrales donde la constante γ aparece mezclada con otros números:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \ln x \, dx = -\frac{1}{4}\sqrt{\pi}(\gamma + 2\ln 2). \tag{1.6}$$

En 2005, J. Sondow, a quien parece encantarle la constante, encontró la fórmula sorprendente

$$\gamma = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-1}{(1-xy)\,\ln(xy)}\, dx\, dy. \tag{1.7}$$

Ella se parece mucho a la expresión

$$\ln\frac{4}{\pi} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-1}{(1+xy)\,\ln(xy)}\, dx\, dy. \tag{1.8}$$

Sería muy interesante si esta similaridad nos diera una relación entre γ y $\ln(4/\pi)$. *Sería un buen ejercicio.* La constante γ también aparece en forma de límite y como una serie:

$$\gamma = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \Gamma(x) = \lim_{s\to 1^+} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{s^n} \right). \tag{1.9}$$

La serie se puede ver en Sondow (1998). Una forma de poner la integral (1.3) dentro de una familia es definir

$$d_n := \int_0^\infty e^{-x}(\ln x)^n \, dx. \tag{1.10}$$

Para esta familia, Mathematica arroja la lista

$$\begin{aligned}
d_1 &= -\gamma, \\
d_2 &= \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}, \\
d_3 &= -\gamma^3 - \frac{\gamma\,\pi^2}{2} - 2\zeta(3), \\
d_4 &= \gamma^4 + \gamma^2\pi^2 + \frac{3\pi^4}{20} + 8\gamma\zeta(3).
\end{aligned}$$

La estructura de estas respuestas se revela con la ayuda de $e_n := (-1)^n d_n$ y las variables $p = \pi, g = \gamma$ y $\zeta(j) = z_j^j$ (obsérvese la potencia j). Entonces,

$$\begin{aligned}
e_1 &= g, \\
e_2 &= g^2 + \frac{1}{6}p^2, \\
e_3 &= g^3 + \frac{1}{2}gp^2 + 2z_3^3, \\
e_4 &= g^4 + g^2p^2 + \frac{3}{20}p^4 + 8gz_3^3.
\end{aligned}$$

e_n es siempre un *polinomio homogéneo* de grado n.
J. Havil (2003) ha escrito un libro interesante sobre la constante de Euler. Allí se encuentran muchos aspectos históricos relacionados con γ y la relación de esta constante con los números primos. Otras representaciones de la constante de Euler son

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\zeta(i)-1}{i} = 1-\gamma \text{ y } \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^2}\,dx = 1-\gamma. \tag{1.11}$$

La función $\{x\}$ es la parte fraccionaria de x, es decir, x menos su parte entera.

1.4. La constante de Catalan. Hay muchos otros números reales que tienen propiedades parecidas a la constante de Euler. En esta sección presento en forma resumida la *constante de Catalan*, definida por

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}. \tag{1.1}$$

Euler demostró que

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{1.2}$$

Si uno desea evaluar la suma alternante de los recíprocos cuadrados, puede decir que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{4}\zeta(2),$$

donde hemos separado los índices pares de los impares. Ahora bien,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{3}{4}\zeta(2),$$

de modo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}. \tag{1.3}$$

Hasta ahora, ningún argumento elemental ha permitido relacionar la constante de Catalan (1.1) con otras constantes básicas del Análisis. Se cree que ésta es una constante fundamental, independiente de π.
Hay una gran variedad de representaciones integrales de G. Desde mi punto de vista, estas son integrales que se pueden evaluar usando G. Comenzamos con

$$G = -\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx. \tag{1.4}$$

Expandiendo el término $1/(1+x^2)$ como una serie geométrica e integrando por partes se obtiene,

$$G = \int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{x} \, dx. \tag{1.5}$$

El cambio de variables $u = \tan^{-1} x$, seguido por $v = 2u$, nos da

$$\int_0^{\pi/2} \frac{v \, dv}{\sin v} = 2G. \tag{1.6}$$

Dentro de los integrandos que arrojan la constante de Catalan se encuentran funciones hiperbólicas

$$\int_0^{\infty} \frac{x \, dx}{\cosh x} = 2G. \tag{1.7}$$

Hay también composiciones de logaritmos y funciones trigonométricas

$$\int_0^{\pi/4} \ln \tan x \, dx = -G \tag{1.8}$$

y de funciones hiperbólicas y trigonométricas

$$\int_0^{\pi/2} \sinh^{-1}(\sin x) \, dx = G. \tag{1.9}$$

Hay integrales donde la respuesta es una combinación de G con otras constantes del Análisis:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x^2 \, dx}{\sin x} = 2\pi G - \frac{7}{2}\zeta(3) \ \text{ y } \ \int_0^{\pi/6} \frac{x \, dx}{\sin x} = \frac{4G}{3} + \frac{\pi}{12} \ln(7 - 4\sqrt{3}). \tag{1.10}$$

Esta última evaluación aparece como ejercicio en Borwein y Borwein (1987). Una buena colección de fórmulas que involucran la constante de Catalan se encuentra en la entrada 33 de Bradley (1998). Esta lista incluye integrales dobles como

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta \, dx}{\sqrt{1 - x^2 \, \sin^2 \theta}} = 2G, \tag{1.11}$$

y

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1 + x^2 y^2} \, dx \, dy = \frac{1}{8} \left(4\pi G - 7\zeta(3) \right), \tag{1.12}$$

que se parece a (1.7).

Una generalización de la segunda integral en (1.10) podría ser

$$s(n) := \int_0^{\pi/n} \frac{x \, dx}{\sin x}. \tag{1.13}$$

Uno esperaría ahora valores especiales de otro tipo de funciones.

1.5. La tabla de integrales de Gradshteyn y Ryzhik. A los matemáticos nos gusta coleccionar cosas como partículas, números primos, variedades, grupos finitos y otros especímenes del zoológico científico. A través del tiempo, el tipo y número de evaluaciones de integrales definidas ha crecido en forma impresionante. Hace ya casi dos siglos, el matemático holandés Bierens de Haan (1858, 1862) comenzó a escribir tablas de integrales. Estas tablas han crecido en forma exponencial y, hoy día, el tratado de A. P. Prudnikov, Yu A. Brychkov y O. I. Marichev (1992) consiste de 5 volúmenes de fórmulas. Es un trabajo enciclopédico. Oleg I. Marichev es actualmente el jefe de la sección de *Funciones Especiales* del lenguaje simbólico Mathematica, inventado por S. Wolfram.

Las tablas son revisadas continuamente por la comunidad científica. Por ejemplo, E. W. Sheldon publicó en 1912 una revisión de las tablas de Bierens de Haan. Ya antes, C. F. Lindman (1891) había realizado una revisión. Un reporte más actual ha sido dado por M. Klerer y F. Grossman (1968).

A pesar de la influencia de lenguajes simbólicos como Mathematica, se siguen imprimiendo tablas de integrales. Una de las más usadas es la de I. S. Gradshteyn y I. M. Ryzhik (2000), que mencionamos anteriormente. Poco se sabe sobre estos matemáticos. La última edición apareció en 2000 y una nueva aparecerá este año. El gran cuidado con el que se editan estas tablas no las libra de algunos errores. Una lista de los errores actuales se encuentra en

`http://www.mathtable.com/errata/gr6_errata.pdf`

Se trata una lista de 64 páginas de errores (la tabla tiene alrededor de mil páginas de fórmulas). En un aviso comercial, los publicistas de los lenguajes simbólicos aseguran que éstos pueden resolver todas las integrales de esta tabla. *No es cierto.* Hemos iniciado el proceso de revisión y verificación de las fórmulas en esta tabla. La idea general es clasificar las fórmulas de acuerdo con la matemática que se encuentra detrás de ellas. Por ejemplo, en Moll (2006), se encuentran los detalles de la fórmula

$$f_n(a) = \int_0^\infty \frac{\ln^{n-1} x \, dx}{(x-1)(x+a)}, \tag{1.1}$$

para $n \geq 2$ y $a > 0$. La fórmula es

$$\begin{aligned} n(1+a)f_n(a) &= (-1)^n n! \left[1 + (-1)^n\right] \zeta(n) \\ &+ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} (2^{2j}-2)(-1)^{j-1} B_{2j} \pi^{2j} (\ln a)^{n-2j}, \end{aligned}$$

donde los B_{2j} son los números de Bernoulli mencionados antes. Esta fórmula incluye las secciones 4,232,4, 4,261,4, 4,262,3, 4,263,1 y 4,264,3. Un simple cambio de variables permite evaluar la integral

$$h_n(a) = \int_{-\infty}^\infty \frac{t^{n-1} \, dt}{(1-e^{-t})(a+e^t)}, \tag{1.2}$$

que incluye 3,419,2, $\cdots$,3,419,6 ¡Diez entradas de la tabla de Gradshteyn y Ryzhik (2000) en una fórmula! Las demostraciones correspondientes se encuentran en

`http://www.math.tulane.edu/~vhm/Table.html`

La motivación original de este proyecto surgió cuando, mirando la última edición de Gradshteyn y Ryzhik (2000), encontramos la fórmula 3,248,5:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}\sqrt{\varphi(x)+\sqrt{\varphi(x)}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}, \tag{1.3}$$

donde

$$\varphi(x) = \frac{4x^2}{3(1+x^2)^2}. \tag{1.4}$$

Por razones que quedarán claras en la próxima sección, estábamos interesados en iteraciones de la raíz cuadrada. Por eso, esta fórmula nos llamó la atención. *Pero el resultado está mal.* No sabemos, hasta ahora, cuál es el resultado correcto. Tampoco lo saben los editores de la tabla de Gradshteyn y Ryzhik (2000). Lo peor de todo, es que es una fórmula nueva, es decir, fue agregada en la última edición. *Plop, como diría Condorito.*

2. La integral de una función racional cuártica

En esta sección presentamos los problemas matemáticos asociados a la evaluación de la integral

$$N_{0,4}(a;m) := \int_0^\infty \frac{dx}{(x^4+2ax^2+1)^{m+1}}.$$

2.1. La fórmula de Wallis. Empezamos con una de las fórmulas básicas del Cálculo Integral, a saber:

$$J_{2,m} := \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^{m+1}} = \frac{\pi}{2^{2m+1}}\binom{2m}{m}. \tag{2.1}$$

Esta evaluación recibe el nombre de *fórmula de Wallis*. La forma elemental de comprobar su validez es hacer el cambio de variables $x = \tan\theta$ para obtener

$$J_{2,m} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m}\theta \, d\theta. \tag{2.2}$$

Usando la identidad $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ e integrando por partes se obtiene la recurrencia

$$J_{2,m} = \frac{2m-1}{2m} J_{2,m-1}. \tag{2.3}$$

Ahora se comprueba que el lado derecho de (2.1) satisface la misma recurrencia y que ambos lados parten de $\frac{\pi}{2}$ cuando $m=0$.

Ejercicio 2.1. Defina $a_m := (2^{2m+1}J_{2,m})/(\pi\binom{2m}{m})$ y encuentre una recurrencia para a_m. Demuestre (2.3).

Ahora presentamos una demostración más complicada. Usando el ángulo doble, se obtiene

$$J_{2,m} = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right)^m d\theta.$$

El cambio de variables $\psi = 2\theta$, el Teorema del Binomio y el hecho que las integrales de potencias impares se anulan (por simetría) nos dice que

$$J_{2,m} = 2^{-m} \sum_{i=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} \binom{m}{2i} J_{2,i}. \tag{2.4}$$

La demostración de (2.1) por inducción es entonces equivalente a

$$\sum_{i=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} 2^{-2i} \binom{m}{2i} \binom{2i}{i} = 2^{-m} \binom{2m}{m}. \tag{2.5}$$

Los detalles se pueden ver en Boros y Moll (2005). Hemos entrado al mundo de las *demostraciones mecánicas*. Es una teoría desarrollada por H. Wilf y D. Zeilberger (1992), con buenos ejemplos en Nemes, Petkovsek, Wilf y Zeilberger (1997). La suma (2.5) es el ejemplo usado en Petkovsek, Wilf y Zeilberger (1996), p. 113, para ilustrar este tipo de métodos.

Wallis no escribe la evaluación (2.1) en la forma presentada aquí. La forma original se basa en el producto infinito

$$\pi = 2 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1}. \tag{2.6}$$

La expresión

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots, \tag{2.7}$$

que fue dada por Vieta (1593) es una de las primeras representaciones analíticas de π. Osler (1999) demostró recientemente que el producto

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{p} \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}}_{n \text{ radicales}}$$
$$\times \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2^{p+1}k-1}{2^{p+1}k} \cdot \frac{2^{p+1}k+1}{2^{p+1}k}$$

entrega la fórmula de Wallis (2.6) para $p=0$ y la expresión de Vieta cuando $p \to \infty$.

Cuando uno se encuentra frente a una integral definida, una de las opciones de evaluación es *preguntarle al computador*. Para ser honesto, esto es sólo una versión mecanizada de lo antiguo: *preguntarle al profesor, monitor u otro alumno*. Mucho se puede aprender por este método. El comando

```
Integrate [ 1/(x^{2} + 1)^{m+1},  {x, 0, Infinity} ]
```

nos entrega

$$\text{If}\left(\text{Re}[m] > -\tfrac{1}{2}, \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+\frac{1}{2})}{2\Gamma(1+m)}, \int_0^\infty (1+x^2)^{-m-1}dx\right). \tag{2.8}$$

Mathematica quiere decir que la respuesta

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+\frac{1}{2})}{2\Gamma(1+m)} \tag{2.9}$$

es válida sólo para $\text{Re}[m] > -\frac{1}{2}$. Las restricciones en los parámetros se pueden averiguar con el comando `Assumptions` . Preguntando

```
Integrate [ 1/(x^{2} + 1)^{m+1}, {x,0, Infinity },
Assumptions \rightarrow { Re[m] > -1/2 } ]
```

obtenemos nuevamente (2.9).

A partir de esto, uno puede motivar la fórmula de duplicación

$$\Gamma(2x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\,\Gamma(x). \tag{2.10}$$

Encontrar la fórmula es a veces la mitad de la demostración. Los detalles aparecen en el Capítulo 10 de Boros y Moll (2004). Esta identidad es una generalización de

$$\sin(2x) = 2\sin x\,\sin(x+\tfrac{\pi}{2}). \tag{2.11}$$

2.2. Una integral que no aparece en Gradshteyn y Ryzhik. Al principio de nuestra investigación sabíamos que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^4+1)^{m+1}} = \frac{\Gamma(5/4)\,\Gamma(m+3/4)}{\Gamma(m+1)}, \tag{2.1}$$

se puede evaluar usando el cambio de variable $t = x^4$ y la representación integral de la *función beta*

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}\,dt}{(1+t)^{x+y}}. \tag{2.2}$$

La identidad

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{2.3}$$

produce (2.1). Lo que nos sorprendió fue que la evaluación de

$$N_{0,4}(a;m) := \int_0^\infty \frac{dx}{(x^4+2ax^2+1)^{m+1}}, \tag{2.4}$$

no apareciera el la tabla de Gradshteyn y Ryzhik (2000) ni se pudiera lograr usando un lenguaje simbólico. Al preguntar a otros matemáticos, siempre nos decían que esto es fácil si uno sabe funciones hipergeométricas. Como nosotros no sabíamos sobre esto, buscamos otras formas de evaluar la integral. En el resto de la sección cuento lo que hicimos.

Una variación de la demostración complicada de la fórmula de Wallis presentada en la sección anterior conduce al siguiente teorema.

Teorema 2.2. *La integral $N_{0,4}(a;m)$ está dada por*

$$N_{0,4}(a;m) = \frac{\pi}{2^{m+3/2}\,(a+1)^{m+1/2}} P_m(a), \tag{2.5}$$

donde $P_m(a)$ es un polinomio con coeficientes racionales.

La primera expresión que encontramos para este polinomio fue

$$\begin{aligned} P_m(a) \quad &= \quad \sum_{j=0}^{m} \binom{2m+1}{2j} (a+1)^j \sum_{k=0}^{m-j} \binom{m-j}{k} \\ &\quad \times \binom{2(m-k)}{m-k} 2^{-3(m-k)} (a-1)^{m-k-j}. \end{aligned}$$

Este fue uno de los primeros resultados que encontré con mi estudiante y colaborador George Boros. En Moll (2002) he escrito sobre él y sobre cómo me inicio en el cálculo de las integrales. Los coeficientes de $P_m(a)$ serán denotados por $d_l(m)$, es decir,

$$P_m(a) = \sum_{l=0}^{m} d_l(m) a^l. \tag{2.6}$$

La expresión anterior para P_m nos da

$$\begin{aligned} d_l(m) \quad &= \quad \sum_{j=0}^{l} \sum_{s=0}^{m-l} \sum_{k=s+l}^{m} \frac{(-1)^{k-l-s}}{2^{3k}} \binom{2k}{k} \binom{2m+1}{2(s+j)} \\ &\quad \times \quad \binom{m-s-j}{m-k} \binom{s+j}{j} \binom{k-s-j}{l-j}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Es difícil probar propiedades sobre los $d_l(m)$ a partir de una expresión tan fea como ésta. Se require algo mejor. A partir de un listado simbólico, se ve que $d_l(m) > 0$. Nos tomó un buen tiempo encontrar una demostración adecuada. En Boros y Moll (2001) presentamos una relación entre estos polinomios y la función $f(a,c) = \sqrt{a+\sqrt{1+c}}$.

Teorema 2.3. *La expansión en serie de Taylor de la función $f(a,c)$ alrededor de $c = 0$ está dada por*

$$\sqrt{a+\sqrt{1+c}} = \sqrt{a+1} + \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N_{0,4}(a;k-1)\, c^k. \tag{2.8}$$

Las integrales cuárticas $N_{0,4}(a;m)$ (2.4) son esencialmente los coeficientes de Taylor de $f(a,c)$. *Muy raro.* La demostración usa teoremas de Ramanujan y se puede consultar en Boros y Moll (2004), capítulo 7. Una de las consecuencias de esta expresión es una fórmula explícita para los coeficientes $d_l(m)$.

Corolario 2.4. *Los coeficientes $d_l(m)$ están dados por*

$$d_l(m) = 2^{-2m} \sum_{k=l}^{m} 2^k \binom{2m-2k}{m-k} \binom{m+k}{m} \binom{k}{l}. \tag{2.9}$$

(2.9) nos hace sospechar que la integral de donde provienen los polinomios $P_m(a)$ pueda ser evaluada con base en la función hipergeométrica. Esto produjo Boros y Moll (2000), donde encontramos que los polinomios $P_m(a)$ son parte de la familia de Jacobi

$$P_m^{(\alpha,\beta)}(a) := \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m+\beta}{m-k} \binom{m+k+\alpha+\beta}{k} \left(\frac{a+1}{2}\right)^k$$

con parámetros $\alpha = m + \frac{1}{2}$ y $\beta = -(m + \frac{1}{2})$. Es decir,

$$P_m(a) = P_m^{(m+1/2,-m-1/2)}(a). \tag{2.10}$$

Los polinomios de Jacobi satisfacen la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} &2(m+1)(m+\alpha+\beta+1)(2m+\alpha+\beta)P_{m+1}^{(\alpha,\beta)}(a) = \\ &(2m+\alpha+\beta+1)\left\{(2m+\alpha+\beta)a+\alpha^2-\beta^2\right\} P_m^{(\alpha,\beta)}(a) \\ &-2(m+\alpha)(m+\beta)(2m+\alpha+\beta+2)P_{m-1}^{(\alpha,\beta)}(a). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Ahora encontramos una recurrencia para los polinomios $P_m(a)$. El argumento presentado aquí está basado en un método de Hermite para integración indefinida de funciones racionales. Bronstein (1997) describe esto en detalle. Se nota que $V(x) = x^4 + 2ax^2 + 1$ y su derivada $V'(x)$ no tienen factores comunes. El algoritmo de Euclides permite encontrar polinomios B y C tales que

$$-1/m = CV + BV'. \tag{2.12}$$

Un simple cálculo nos entrega

$$B(x) = -\frac{1}{4m}\frac{1}{a^2-1}\left((1-2a^2)x - ax^3\right) \text{ y } C(x) = -\frac{1}{m}\left(1 + \frac{a}{a^2-1}x^2\right).$$

Dividiendo (2.12) entre $V^{m+1}(x)$ e integrando de 0 a ∞ se encuentra

$$N_{0,4}(a;m) = \left(1 + \frac{1-2a^2}{4m(a^2-1)}\right) N_{0,4}(a;m-1) + \frac{(4m-3)a}{4m(a^2-1)} N_{1,4}(a;m-1),$$

donde

$$N_{1,4}(a;m) = \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^4+2ax^2+1)^{m+1}}. \tag{2.13}$$

Esta recurrencia se puede escribir de la forma

$$N_{0,4}(a;m) = \left(1+\frac{1-2a^2}{4m(a^2-1)}\right)N_{0,4}(a;m-1) - \frac{(4m-3)a}{8m(m-1)(a^2-1)}\frac{d}{da}N_{0,4}(a;m-2). \tag{2.14}$$

Reemplazando la relación entre $N_{0,4}(a;m)$ y $P_m(a)$ obtenemos el resultado que sigue.

Teorema 2.5. *Los polinomios $P_m(a)$ satisfacen*

$$P_m(a) = \frac{(2m-3)(4m-3)a}{4m(m-1)(a-1)}P_{m-2}(a) - \frac{(4m-3)a(a+1)}{2m(m-1)(a-1)}\frac{d}{da}P_{m-2}(a) + \frac{4m(a^2-1)+1-2a^2}{2m(a-1)}P_{m-1}(a).$$

Ejercicio 2.6. Encontrar los valores

$$P_m(1) = 2^{-2m}\binom{4m+1}{2m} \text{ y } P'_m(1) = \frac{m(m+1)}{2m+3}P_m(1). \tag{2.15}$$

Usarlos para confirmar que el lado derecho del Teorema 2.5 es, a pesar de su apariencia, un polinomio en a.

Ejercicio 2.7. Confirmar que los polinomios $P_m(a)$ *no* satisfacen la recurrencia (2.11) cuando uno usa $\alpha = m+\frac{1}{2}$ y $\beta = -(m+\frac{1}{2})$. Explicar lo que está ocurriendo.

2.3. Propiedades aritméticas de los coeficientes.

La expresión

$$d_l(m) = 2^{-2m}\sum_{k=l}^{m} 2^k\binom{2m-2k}{m-k}\binom{m+k}{m}\binom{k}{l} \tag{2.1}$$

muestra que $d_l(m) > 0$ y $d_l(m) \in \mathbb{Q}$. Además, el denominador es una potencia de 2. Dado un número racional positivo x y un número primo p, $x = (a/b)p^m, m \in \mathbb{Z}$ y $a, b \in \mathbb{Z}$ no son múltiplos p. El número m se llama la *valuación p-ádica de x* y se escribe $m = \nu_p(x)$ *¿Qué se puede decir sobre $\nu_p(d_l(m))$?*
Si consideramos $e_l(m) = 2^{2m}d_l(m)$, entonces $\nu_2(d_l(m)) = -2m+\nu_2(e_l(m))$. Como $e_l(m) \in \mathbb{N}$, se sabe que $\nu_p(e_l(m)) \geq 0$. Esto nos da

$$\nu_p(d_l(m)) = \nu_p(e_l(m)) \geq 0, \quad \text{si } p \neq 2, \tag{2.2}$$

y en el caso que $p = 2$, se tiene $\nu_2(d_l(m)) = -2m+\nu_2(e_l(m)) \geq -2m$. Examinando el caso $p = 2$ con más cuidado se ve que, para $l > 0$, en $e_l(m)$ cada término tiene un factor (a lo menos) 2^l. Esto nos dice que $\nu_2(e_l(m)) \geq l$. En el caso $l = 0$, todos los términos en la suma $e_l(m)$ son pares. La única excepción podría ser el primero. Este número es el coeficiente binomial central $C_m := \binom{2m}{m}$. Él es siempre par, ya que

$$\binom{2m}{m} = \binom{2m-1}{m} + \binom{2m-1}{m-1} = 2\binom{2m-1}{m}. \tag{2.3}$$

Ejercicio 2.8. Demuestre que $\nu_2(C_m) = 1$ precisamente cuando m es una potencia de 2.

Se concluye que al menos $\nu_2(d_l(m)) \geq -2m+1$ ¿Qué más se puede decir? Después de mucho experimentar, nos dimos cuenta que conviene definir la función

$$A_{l,m} := l!\, m!\, 2^{m+l}\, d_l(m). \tag{2.4}$$

Las funciones $\nu_2(A_{l,m})$ son interesantes. Partimos de un dibujo de $\nu_2(A_1(m))$.

FIGURA 1. La valuación 2-ádica de $A_1(m)$ para $1 \leq m \leq 61$.

Se observa que la figura tiene *estructura de bloque*, es decir, los valores satisfacen $\nu_2(A_{l,2m-1}) = \nu_2(A_{l,2m})$. Si ahora graficamos la función $\nu_2(A_{l,2m})$ (para evitar repeticiones) obtenemos la Figura 2.

FIGURA 2. La valuación 2-ádica de $A_1(2m)$ para $1 \leq m \leq 31$.

Se reconoce que la función $\nu_2(A_{1,2m})$ está relacionada con $\nu_2(m)$. El próximo teorema apareció en Boros, Moll y Shallit (2001).

Teorema 2.9. *La valuación 2-ádica del término $A_{1,2m}$ está dada por*

$$\nu_2(A_{1,2m}) = 2 + \nu_2(m). \tag{2.5}$$

Además, se tiene

$$\nu_2(A_{l,2m-1}) = \nu_2(A_{l,2m}). \tag{2.6}$$

Ejercicio 2.10. Demuestre que para un primo p, la valuación p-ádica del factorial es

$$\nu_p(m!) = \frac{m - s_p(m)}{p-1}, \tag{2.7}$$

donde $s_p(m)$ es la suma de los dígitos de m escrito en base p. En particular,

$$\nu_2(m!) = m - s_2(m). \tag{2.8}$$

Esta es una fórmula de Legendre (1830) que debiera ser más conocida.

Volviendo a los coeficientes originales, tenemos que

$$\nu_2(d_1(m)) = 1 - 2m + \nu_2\left(\binom{m+1}{2}\right) + s_2(m). \tag{2.9}$$

Surge entonces el problema de encontrar fórmulas similares para $\nu_2(d_l(m)), l \geq 2$. Los próximos dibujos dan una idea general de las valuaciones 2-ádicas de $A_{l,m}$. La Figura 3 muestra $\nu_2(A_{2,m})$.

FIGURA 3. La valuación 2-ádica de $A_2(m)$ para $1 \leq m \leq 60$.

Nuevamente se observa una estructura de bloque, ahora con período 4. La Figura 4 muestra la valuación 2-ádica de $A_2(4m)$. Hemos agrandado el rango para ver mejor.

FIGURA 4. La valuación 2-ádica de $A_2(4m)$ para $1 \leq m \leq 30$.

A partir de esto, uno conjectura que

$$\nu_2(A_2(4m)) = \nu_2(m) + 5. \tag{2.10}$$

Estos dos ejemplos alimentan la esperanza de obtener una fórmula explícita para $\nu_2(A_{l,m})$. La situación es algo más complicada de lo que uno espera. Por ejemplo, la Figura 5 muestra el caso $l = 59$. Hay estructura de bloque de longitud 2. La Figura 6 muestra las valuaciones 2-ádicas de $A_{59,2m}$.

FIGURA 5. La valuación 2-ádica de $A_{59}(m)$ para $59 \leq m \leq 196$.

FIGURA 6. La valuación 2-ádica de $A_2(2m)$ para $30 \leq m \leq 98$.

Dada la complejidad de estas figuras, fue grato demostrar el siguiente resultado en Amdeberhan, Manna y Moll (2007).

Teorema 2.11. *La valuación $\nu_2(A_{l,m})$ es una función periódica de período $2^{1+\nu_2(m)}$. Además,*

$$\nu_2(A_{l,m}) = \nu_2((m+1-l)_{2l}) + l, \tag{2.11}$$

donde $(a)_j = a(a+1)(a+2)\cdots(a+j-1)$ es el símbolo de Pochhammer.

El análisis de las valuaciones de $A_{l,m}$ para primos impares parece ser mucho mas difícil. La Figura 7 muestra la valuación 3-ádica de $A_{2,m}$, donde se ve un crecimiento lineal. La figura 8 muestra el error de este comportamiento lineal.

FIGURA 7. La valuación 3-ádica de $A_2(m)$ para $2 \leq m \leq 200$.

FIGURA 8. La desviación del comportamiento lineal para $p = 3$.

Las figuras 9 y 10 muestran datos similares para el primo 5.

FIGURA 9. La valuación 5-ádica de $A_2(m)$ para $2 \leq m \leq 200$.

FIGURA 10. La desviación del comportamiento lineal para $p = 5$.

Los experimentos nos dicen que

$$\nu_p(A_{l,m}) \sim \frac{m}{p-1} \tag{2.12}$$

y que el error $\nu_p(A_{l,m}) - \frac{m}{p-1}$ tiene cierta estructura que no es completamente aleatoria. Hay un comportamiento *periódico en cierta escala.* Todo esto deber ser estudiado en más detalle.

Una de las cosas importantes que se deben aprender es qué hacer cuando a uno no se le ocurre nada. La mayor parte del tiempo uno se la pasa sin ideas buenas. Como en mi trabajo aparecen muchos polinomios, yo me entretengo calculando ceros. La representación de los coeficientes $d_l(m)$ en (2.9) es eficiente cuando l está cerca de m (hay pocos términos en la suma). Buscando una expresión que fuese eficiente cuando l es pequeño en comparación con m, encontramos

$$A_{l,m} = \alpha_l(m) \prod_{k=1}^{m} (4k-1) - \beta_l(m) \prod_{k=1}^{m} (4k+1), \tag{2.13}$$

donde α_l y β_l son polinomios de grados l y $l-1$, respectivamente, en la variable m. Calculando los ceros encontramos algo sorprendente: *Todos* *ellos están en la línea vertical* $\mathrm{Re}(m) = -\frac{1}{m}$. Demostrar esto requiere una idea buena: A mí se me ocurrió preguntarle a John Little. Esto produjo el artículo Little (2005).

Teorema 2.12 (John Little, 2005)**.** *Todos los ceros de la familia de polinomios* α_l *satisfacen* $Re(m) = -\frac{1}{2}$*. Lo mismo ocurre para* $\beta_l(m)$*.*

Funciones con todos sus ceros en rectas verticales atraen la atención de la comunidad. Sería interesante ver que ocurre con estas familias cuando uno pasa al límite $l \to \infty$.

3. Landen

En esta última sección discutiremos la extensión de las ideas presentadas en las dos primeras a la integral racional

$$U_6 = U_6(a, b; c, d, e) = \int_0^\infty \frac{cx^4 + dx^2 + e}{x^6 + ax^4 + bx^2 + 1}\, dx.$$

3.1. Extensión del cambio trigonométrico al grado 6. El cambio de variable usual $x = \tan\theta$ produce

$$U_6 = \int_0^{\pi/2} \frac{cS^4 + dS^2C^2 + eC^4}{S^6 + aS^4C^2 + bS^2C^4 + C^6} d\theta, \tag{3.1}$$

donde $S = \sin\,\theta$ y $C = \cos\,\theta$. Las identidades $\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$ y $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$ proveen

$$U_6 = 2\int_0^\pi \frac{(c-d+e)B^2 + 2(e-c)B + (c+d+e)}{(a-b)B^3 + (6-a-b)B^2 + (b-a)B + (a+b+2)}\, dt, \tag{3.2}$$

donde $B = \cos t$. Hemos partido de una integral que queremos entender y nos encontramos con una integral trigonométrica que parecer ser mas difícil que la original. *Esto es correcto, pero inútil.*

Algo interesante ocurre si uno modifica el denominador $Q_6(x) = x^6 + ax^4 + bx^2 + 1$ multiplicándolo por $x^6Q_6(1/x) = x^6 + bx^4 + ax^2 + 1$. Haciendo lo propio con el numerador, $U_6 =$

$$\int_0^\infty \frac{cx^{10} + (bc+d)x^8 + (ac+bd+e)x^6 + (c+ad+be)x^4 + (d+ae)x^2 + e}{(x^{12}+1) + (a+b)(x^{10}+x^2) + (a+b+ab)(x^4+x^8) + (2+a^2+b^2)x^6}\, dx.$$

¡Paciencia! El cambio de variable $x = \tan\theta$ y la multiplicación por $\cos^{12}\theta$ arroja

$$U_6 = \int_0^{\pi/2} \frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}}\, d\theta, \tag{3.3}$$

donde

$$\begin{aligned}
\text{Numerador} &= cS^{10} + (bc+d)S^8C^2 + (ac+bd+e)S^6C^4 \\
&\quad + (c+ad+be)S^4C^6 + (d+ae)S^2C^8 + eC^{10}, \\
\text{Denominator} &= (S^{12}+C^{12}) + (a+b)(S^{10}C^2 + S^2C^{10}) \\
&\quad + (a+b+ab)(S^8C^4 + S^4C^8) + (2+a^2+b^2)S^6C^6.
\end{aligned}$$

Al escribir las identidades para el ángulo doble en la forma $S^2 = \frac{1-u}{2}$ y $C^2 = \frac{1+u}{2}$, $u = \cos(2\theta)$, se obtiene

$$U_6 = \int_0^{\pi/2} \frac{Au^5 + Bu^4 + Cu^3 + Du^2 + Eu + F}{Hu^6 + Iu^4 + Ju^2 + K}\, d\theta. \tag{3.4}$$

Los parámetros son

$$\begin{aligned}
A &= (1/32)(-ac+bc+ad-bc-ae+be), \\
B &= (1/32)(6c+ac-3bc-6d+ad+bd+6e-3ae+be), \\
C &= (1/16)(-6c+ac+bc-ad+bd+6e-ae-be), \\
D &= (1/16)(4c-ac+bc+2d-ad-bd+4e+ae-be), \\
E &= (1/32)(-4c-ac-3bc+ad-bd+4e+3ae+be), \\
F &= (1/32)(2c+ac+bc+2d+ad+bd+2e+ae+be), \\
H &= -(1/64)(a-b)^2, \\
I &= (1/64)(36-12a+3a^2-12b-2ab+3b^2), \\
J &= (1/64)(24+8a-3a^2+8b-2ab-3b^2), \\
K &= (1/64)(4+4a+a^2+4b+2ab+b^2).
\end{aligned}$$

Este es el primer punto clave de este cálculo. El polinomio en el denominador es *par*. Esto resulta de convertir el denominador original en uno simétrico. El cambio de variable $t = 2\theta$ nos da

$$U_6 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{Av^5 + Bv^4 + Cv^3 + Dv^2 + Ev + F}{Hv^6 + Iv^4 + Jv^2 + K}\, dt, \tag{3.5}$$

con $v = \cos t$. El segundo punto clave de esta evaluación, que *falla* cuando la integral original nos es una función racional *par*, es el siguiente : Si j es un entero impar y P es un polinomio par, se tiene que

$$\int_0^{\pi} \frac{(\cos t)^j\, dt}{P(\cos t)} = 0. \tag{3.6}$$

Esto se verifica mediante el cambio de variable $t \to \pi - t$. Se concluye que

$$U_6 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{Bv^4 + Dv^2 + F}{Hv^6 + Iv^4 + Jv^2 + K}\, dt, v = \cos t. \tag{3.7}$$

Ahora referimos todo al ángulo doble, mediante $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$. Reemplazando en (3.7) y haciendo el cambio de variable $s = 2t$, se obtiene

$$U_6 = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{A_2w^2 + B_2w + C_2}{D_2w^3 + E_2w^2 + F_2w + G_2}\, ds, w = \cos s. \tag{3.8}$$

Los parámetros están dados por

$$
\begin{aligned}
A_2 &= (1/16)(6c + ac - 3bc - 6d + ad + bd + 6e - 3ae + be), \\
B_2 &= (1/8)(14c - ac - bc - 2d - ad - bd + 14e - ae - be), \\
C_2 &= (1/16)(30c + ac + 5bc + 10d + ad + bd + 30e + 5ae + be), \\
D_2 &= -(1/64)(a-b)^2, \\
E_2 &= (1/64)(72 - 24a + 3a^2 - 24b + 2ab + 3b^2), \\
F_2 &= (1/64)(240 - 16a - 3a^2 - 16b - 10ab - 3b^2), \\
G_2 &= (1/64)(200 + 40a + a^2 + 40b + 6ab + b^2).
\end{aligned}
$$

Por periodicidad y simetría del coseno, $\int_0^{2\pi} \cdots = \int_{-\pi}^{\pi} \cdots = 2\int_0^{\pi} \cdots$, concluimos que

$$
U_6 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{A_2 w^2 + B_2 w + C_2}{D_2 w^3 + E_2 w^2 + F_2 w + G_2}\, ds, w = \cos s. \tag{3.9}
$$

Mediante el cambio de variable usual $r = \tan\left(\frac{s}{2}\right)$ y recordando que $\cos s = \frac{1-r^2}{1+r^2}$ y $ds = \frac{2\,dr}{1+r^2}$,

$$
U_6 = \int_0^{\infty} \frac{A_3 r^4 + B_3 r^2 + C_3}{D_3 r^6 + E_3 r^4 + F_3 r^2 + G_3}\, dr. \tag{3.10}
$$

Ahora, los parámetros se expresan como

$$
\begin{aligned}
A_3 &= 2(2c + ac + bc + 2d + ad + bd + 2e + ae + be), \\
B_3 &= 2(12c + 4bc + 8d + 12e + 4ae), \\
C_3 &= 32c + 32e, \\
D_3 &= 4 + 4a + a^2 + 4b + 2ab + b^2, \\
E_3 &= 36 + 20a + 20b + 4ab, \\
F_3 &= 96 + 16a + 16b, \\
G_3 &= 64.
\end{aligned}
$$

Hemos vuelto a la forma original de la integral U_6. Sólo nos falta normalizar los coeficientes del denominador. Dividiendo todo por G_3 y haciendo el cambio de variable

$$
r = \left(\frac{G_3}{D_3}\right)^{1/6} z \tag{3.11}
$$

se produce el resultado siguiente. Los detalles dados aquí aparecieron originalmente en Boros y Moll (1999).

Teorema 3.1. *La integral*

$$
U_6(a,b;c,d,e) := \int_0^{\infty} \frac{cx^4 + dx^2 + e}{x^6 + ax^4 + bx^2 + 1}\, dx \tag{3.12}
$$

es invariante bajo el cambio de parámetros

$$a_1 = \frac{ab+5a+5b+9}{(a+b+2)^{4/3}}, \tag{3.13}$$
$$b_1 = \frac{a+b+6}{(a+b+2)^{2/3}},$$
$$c_1 = \frac{c+d+e}{(a+b+2)^{2/3}}, \tag{3.14}$$
$$d_1 = \frac{(b+3)c+2d+(a+3)e}{a+b+2},$$
$$e_1 = \frac{c+e}{(a+b+2)^{1/3}}.$$

Esta transformación de los parámetros se llamará *transformación racional de Landen*. La denotaremos por

$$\Phi_6 : \Lambda_6 \subset \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5,\ \Lambda_6 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : U_6(a,b;c,d,e) \text{ es finita } \}. \tag{3.15}$$

No es difícil de ver que en la región Λ_6 del plano $a-b$, la expresión $a+b+2$, que aparece en los radicales, es siempre positiva. Cuando encontramos las transformaciones (3.13) y (3.14), nos dimos cuenta que teníamos una versión racional de la transformación de Landen

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab}. \tag{3.16}$$

Ella preserva el valor de la integral elíptica

$$G(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}. \tag{3.17}$$

Iterando (3.16) produce una sucesión doble (a_n, b_n) y es fácil probar que $\text{lím}_{n\to\infty} a_n = \text{lím}_{n\to\infty} b_n$. Este límite común se llama *promedio aritmético-geométrico* y se denota por $\text{AGM}(a,b)$. Pasando al límite en la identidad $G(a_n,b_n) = G(a,b)$, se obtiene

$$G(a,b) = \frac{\pi}{2\,\text{AGM}(a,b)}. \tag{3.18}$$

Esto proporciona un método numérico para evaluar la integral elíptica $G(a,b)$. La convergencia es cuadrática. Lo mismo ocurre en (3.13) y (3.14).

Teorema 3.2. *Supongamos que los valores iniciales de las sucesiones generadas por (3.13) y (3.14) son tales que la integral $U(a,b;c,d,e)$ es finita. Es decir, supongamos que $(a,b) \in \Lambda_6$. Entonces,*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$ *y, además,*

(b) *Existe un número real $L = L(a,b,c,d,e)$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} e_n = L \ \ y \ \ \lim_{n\to\infty} d_n = 2L.$$

Pasando al límite en la identidad

$$\int_0^\infty \frac{c_n x^4 + d_n x^2 + e_n}{x^6 + a_n x^4 + b_n x^2 + 1}\,dx = \int_0^\infty \frac{cx^4 + dx^2 + e}{x^6 + ax^4 + bx^2 + 1}\,dx, \tag{3.19}$$

obtenemos

$$\int_0^\infty \frac{cx^4+dx^2+e}{x^6+ax^4+bx^2+1}\,dx = \frac{\pi L}{2}. \tag{3.20}$$

La convergencia es cuadrática, es decir, $||c_{n+1}-L|| \leq C||c_n-L\|^2$. *Al igual que en el caso elíptico, esto nos da un método numérico para evaluar la integral racional.*

Nota 3.3 (Iteración de Φ_6 fuera de la región de convergencia). Las transformaciones (3.13) describen un sistema dinámico en el plano, que uno puede estudiar en forma independiente a las integrales. La trayectoria de un punto inicial (a,b) tal que la integral $U_6(a,b;c,d,e)$ es finita se describe en detalle en la próxima sección. Cuando esta integral diverge (porque el polinomio en el denominador tiene raíces reales positivas), la situación es mucho más compleja. La Figura 11 muestra los primeros 5.000 valores de la trayectoria de un punto inicial fuera de la región de convergencia de la integral. *Esto necesita ideas nuevas.*

FIGURA 11. Iteración de Φ_6 partiendo bajo el resolvente.

3.2. Una interpretación geométrica. Ahora presentamos una interpretación geométrica de la transformación racional de Landen (3.13, 3.14). La serie de cambios de variables, que fueron descritos para encontrarla, se puede hacer en un solo paso. Uno debe relacionar $\tan 2\theta$ y $\tan\theta$. Por razones históricas (esto es lo que hicimos primero), presentamos los detalles con *cotangente* en lugar de tangente. Partimos de la integral racional par

$$I = \int_0^\infty R(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty R(x)\,dx. \tag{3.1}$$

e introducimos la variable $y = R_2(x) = \frac{x^2-1}{2x}$, motivados por la identidad $\cot 2\theta = R_2(\cot\theta)$. La función $R_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $2:1$. Las ramas de la inversa son $x = \sigma_\pm(y) = y \pm \sqrt{y^2+1}$. Dividiendo la integral en

$$I = \int_{-\infty}^0 R(x)\,dx + \int_0^\infty R(x)\,dx \tag{3.2}$$

y poniendo $x = \sigma_+(y)$ en la primera y $x = \sigma_-(y)$ en la segunda integral,

$$I = \int_{-\infty}^\infty \left(R_+(y) + R_-(y)\right)\,dy, \tag{3.3}$$

donde

$$R_+(y) = R(\sigma_+(y)) + R(\sigma_-(y)) \text{ y } R_-(y) = \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\left(R(\sigma_+(y)) - R(\sigma_-(y))\right).$$

Un cálculo directo muestra que R_+ and R_- son funciones racionales a lo más del grado de R. El cambio de variables $y = R_2(x)$ convierte el diferencial meromorfo $\varphi = R(x)\,dx$ en

$$\begin{aligned} R(\sigma_+(y))\frac{d\sigma_+}{dy} + R(\sigma_-(y))\frac{d\sigma_-}{dy} &= \left((R(\sigma_+) + R(\sigma_-)) + \frac{y(R(\sigma_+) - R(\sigma_-))}{\sqrt{y^2+1}} \right) dy \\ &= (R_+(y) + R_-(y))\; dy. \end{aligned}$$

La situación general es como sigue. Se parte de un recubrimiento ramificado finito $\pi : X \to Y$ de superficies de Riemann y un diferencial meromorfo φ en X. Sea $U \subset Y$ un dominio simplemente conexo que no contiene ningún punto crítico de π y sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_k : U \to X$ las secciones de π. En términos simples, las σ_j se pueden pensar como las inversas de π. Se define

$$\pi_*\varphi\Big|_U = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j^*\varphi. \tag{3.4}$$

En Hubbard y Moll (2003) demostramos que esta construcción preserva las 1-formas diferenciales analíticas, es decir, si φ es una forma analítica en X entonces $\pi_*\varphi$ es una forma analítica en Y. Además, para cada curva rectificable γ en Y, se tiene

$$\int_\gamma \pi_*\varphi = \int_{\pi^{-1}\gamma} \varphi. \tag{3.5}$$

En el caso especial del espacio proyectivo, se obtiene lo siguiente.

Lema 3.4. *Si $\pi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ es analítico, y $\varphi = R(z)\,dz$, R función racional, entonces $\pi_*\varphi$ se puede escribir en la forma $R_1(z)\,dz$, donde R_1 una función racional de grado a lo más el grado de R.*

Esta es la generalización del hecho que las integrales (3.1) y (3.3) son iguales.

3.3. Una generalización. El procedimiento descrito en la Sección 3.1 se puede extender a la transformación racional R_m definida por la identidad

$$\cot m\theta = R_m(\cot\theta). \tag{3.1}$$

El número $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$, es arbitrario. Ahora presentamos propiedades elementales de R_m.

Proposición 3.5. *La función racional R_m satisface:*

(a) *Para $m \in \mathbb{N}$, $R_m = P_m/Q_m$, donde*

$$\begin{aligned} P_m(x) &= \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} (-1)^j \binom{m}{2j} x^{m-2j} \;\; y \\ Q_m(x) &= \sum_{j=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} (-1)^j \binom{m}{2j+1} x^{m-(2j+1)}. \end{aligned}$$

(b) *La función R_m es conjugada a $f_m(x) = x^m$ vía $M(x) = \frac{x+i}{x-i}$, es decir, $R_m = M^{-1} \circ f_m \circ M$.*

(c) *Los polinomios P_m y Q_m tienen ceros reales dados por*

$$\begin{aligned} p_k &= \cot\left(\frac{(2k+1)\pi}{2m}\right) \text{ para } 0 \leq k \leq m-1 \text{ y} \\ q_k &= \cot\left(\frac{k\pi}{m}\right) \text{ para } 1 \leq k \leq m-1. \end{aligned}$$

Ahora describiremos un algoritmo que produce una transformación racional de Landen para una función racional arbitraria $R(x) = B(x)/A(x)$. La única restricción es que la integral de R en la recta real debe ser finita. El algoritmo produce una nueva lista de coeficientes, con los cuales uno produce una nueva función racional $R^{(1)}(x) = J(x)/H(x)$ que satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(x)}{A(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J(x)}{H(x)}\, dx. \tag{3.2}$$

La iteración de este procedimiento produce una sucesión $\mathbf{x}_n$, que tiene un límite $\mathbf{x}_\infty$ con convergencia de orden m, es decir,

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_\infty\| \leq C\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_\infty\|^m. \tag{3.3}$$

Los detalles aparecen en Manna y Moll (2007). El Lema 3.4 aplicado a la función $\pi(x) = R_m(x)$, vista como un recubrimiento ramificado de $\mathbb{P}^1$, garantiza la existencia de otra función racional $R^{(1)}$. El problema del cálculo eficiente de los coeficientes de R_1 se presenta más adelante. En particular, se muestra que todo se puede calcular en forma simbólica.

Paso 1. La función racional inicial es $R(x) = B(x)/A(x)$. Se supone que A y B son polinomios con coeficientes reales y que A no tiene ceros reales. Escribimos $A(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^{p-k}$ y $B(x) = \sum_{k=0}^{p-2} b_k x^{p-2-k}$.

Paso 2. Se escoge un número entero positivo m.

Paso 3. Se define el polinomio resolvente

$$H(x) = \text{Res}_z(A(z), P_m(z) - xQ_m(z)) = \sum_{l=0}^{p} e_l x^{p-l}. \tag{3.4}$$

H está definido como el determinante de la matriz de Sylvester formada con los coeficientes de estos polinomios. Como tal, los coeficientese_l de $H(x)$ son, a su vez, polinomios en las variables a_i con coeficientes enteros. Explícitamente,

$$e_l = (-1)^l a_0^m \prod_{j=1}^{p} Q_m(x_j) \times \sigma_l^{(p)}(R_m(x_1,\, R_m(x_2),\, \ldots, R_m(x_p)), \tag{3.5}$$

donde $\{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$ son los ceros de A, contados de acuerdo con la multiplicidad. Las funciones $\sigma_l^{(p)}$ son las funciones simétricas elementales en las

p variables definidas por

$$\prod_{l=1}^{p}(y-y_l)=\sum_{l=0}^{p}(-1)^l\sigma_l^{(p)}(y_1,\cdots,y_p)y^{p-l}. \tag{3.6}$$

Los coeficientes e_l se pueden calcular simbólicamente a partir de los coeficientes de A, sin calcular los ceros de A. Definamos

$$E(x)=H(R_m(x))\times Q_m(x)^p. \tag{3.7}$$

Paso 4. El polinomio A divide a E con cociente Z. Los coeficientes de Z son polinomios en los a_i con coeficientes enteros.
Paso 5. Se define el polinomio $C(x)=B(x)Z(x)$.
Paso 6. Existe un polinomio $J(x)$, cuyos coeficientes poseen una fórmula explícita en términos de los coeficientes c_j de $C(x)$, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{B(x)}{A(x)}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J(x)}{H(x)}\,dx. \tag{3.8}$$

Esta es la nueva función racional cuya existencia está asegurada por el Lema 3.4. Todo es explícito. Las fórmulas se pueden ver en Manna y Moll (2007). Esta es la *transformación racional de Landen de orden m*.

Ejemplo 3.6. El algoritmo con $m=3$ y $R(x)=\frac{1}{ax^2+bx+c}$ produce el siguiente resultado. Los detalles aparecen en Manna y Moll (2007a).

Teorema 3.7. *La integral*

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{ax^2+bx+c} \tag{3.9}$$

es invariante bajo la transformación

$$\begin{aligned} a &\mapsto \frac{a}{\Delta}\left((a+3c)^2-3b^2\right), \\ b &\mapsto \frac{b}{\Delta}\left(3(a-c)^2-b^2\right), \\ c &\mapsto \frac{c}{\Delta}\left((3a+c)^2-3b^2\right), \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde $\Delta=(3a+c)(a+3c)-b^2$. *La condición* $b^2-4ac<0$, *impuesta para asegurar la convergencia de la integral, es preservada por la iteración.*

3.4. El problema de la convergencia. La convergencia de la sucesión doble (a_n,b_n), que aparece en la transformación elíptica de Landen (3.16), es fácil de demostrar. Supongamos que $0<b_0\leq a_0$, la desigualdad entre el promedio aritmético $(a+b)/2$ y el promedio geométrico $\sqrt{ab}$ de un par de numeros, nos da $b_n\leq b_{n+1}\leq a_{n+1}\leq a_n$. Además,

$$0\leq a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{2}\frac{(a_n-b_n)^2}{(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n})^2}. \tag{3.1}$$

Esto demuestra que a_n y b_n tienen un límite común $M = \mathrm{AGM}(a,b)$, el promedio aritmético-geométrico de a y b. La convergencia es cuadrática, es decir:

$$|a_{n+1} - M| \leq C|a_n - M|^2, \tag{3.2}$$

para una constante $C > 0$ independiente de m.

La transformaciones racionales de Landen producen funciones en el espacio de los coeficientes de la integral. En esta sección presentamos lo que sabemos sobre la convergencia para el caso racional. Es conveniente dividir la discusión en dos partes.

Caso 1. La semirrecta $[0,\infty)$. Sea $R(x)$ una función racional par escrita en la forma $R(x) = P(x)/Q(x), P(x) = \sum_{k=0}^{p-1} b_k x^{2(p-1-k)}, Q(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^{2(p-k)}$, normalizada por $a_0 = a_p = 1$. El *espacio de parámetros* es$\mathfrak{P}_{2p}^{+} = \{(a_1,\cdots,a_{p-1};b_0,\cdots,b_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}\times\mathbb{R}^p$. Por simplicidad escribiremos $\mathbf{a} := (a_1,\cdots,a_{p-1})$ y $\mathbf{b} := (b_0,\cdots,b_p)$. Definamos

$$\Lambda_{2p} = \left\{(a_1,\cdots,a_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1} : \int_0^\infty R(x)\,dx \text{ es finita}\right\}. \tag{3.3}$$

Se observa que la convergencia de la integral sólo depende de los parámetros en el denominador. La transformación de Landen produce una función $\Phi_{2p} : \mathfrak{P}_{2p}^{+} \to \mathfrak{P}_{2p}^{+}$ que preserva la integral. Usaremos la notación $\mathbf{a}_n = (a_1^{(n)},\cdots,a_{p-1}^{(n)}), \mathbf{b}_n = (b_0^{(n)},\cdots,b_p^{(n)})$, de tal suerte que

$$(\mathbf{a}_n,\mathbf{b}_n) = \Phi_{2p}(\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{b}_{n-1}) \tag{3.4}$$

son las iteraciones de Φ_{2p}. El resultado que uno espera es el siguiente.

Teorema 3.8. *La región Λ_{2p} es invariante bajo Φ_{2p}. Además,*

$$\mathbf{a}_n \to \left(\binom{p}{1},\binom{p}{2},\cdots,\binom{p}{p-1}\right) \tag{3.5}$$

y existe un número L, que depende de las condiciones iniciales, tal que

$$\mathbf{b}_n \to \left(\binom{p-1}{0}L,\binom{p-1}{1}L,\cdots,\binom{p-1}{p-1}L\right). \tag{3.6}$$

Esto es equivalente a decir que la sucesión de funciones racionales formadas por la transformación de Landen converge a $L/(x^2+1)$.

Esto fue establecido en Hubbard y Moll (2003) usando la interpretación geométrica de las transformaciones de Landen.

Teorema 3.9. *Sea φ una forma diferencial analítica en una vecindad de $\mathbb{R}\subset\mathbb{P}^1$. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty}(\pi_*)^n\varphi = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\right)\frac{dz}{1+z^2}, \tag{3.7}$$

donde la convergencia es uniforme en los subconjuntos compactos de U, la vecindad en la definición de π_*.

La demostración de Hubbard y Moll (2003) se da para el caso de $\pi(z) = \frac{z^2-1}{2z} = R_2(z)$, pero se extiende sin dificultad a $R_m(z)$. Este teorema se puede reescribir de la forma siguiente.

Teorema 3.10. *Las iteraciones de las transformaciones de Landen que parten de* $(\mathbf{a}_0, \mathfrak{b}_0) \in \mathfrak{P}_{2p}^{+}$ *convergen (al límite dado en el Teorema 3.8) si y sólo si la integral en los valores iniciales es finita.*

Sería interesante establecer este resultado usando solamente técnicas de sistemas dinámicos. Esto ha sido hecho sólo para el caso $p = 3$. Para U_6, la región Λ_6 está descrita por la *curva discriminante* $\mathfrak{R}$, que corresponde al conjunto de ceros del polinomio

$$R(a,b) = 4a^3 + 4b^3 - 18ab - a^2b^2 + 27. \tag{3.8}$$

Este conjunto tiene dos componentes conexas. La primera, $\mathfrak{R}_+$, contiene el punto cúspide $(3,3)$ y la segunda, $\mathfrak{R}_-$, con ecuación $R_-(a,b) = 0$, no interseca al primer cuadrante. La rama $\mathfrak{R}_-$ es la frontera del conjunto Λ_6. La identidad $R(a_1,b_1) = (a-b)^2R(a,b)/(a+b+2)^4$ muestra que $\partial\mathfrak{R}$ es invariante bajo Φ_6. Examinando el efecto de esta transformación en las líneas de pendiente -1, se obtiene una parametrización directa del flujo en la curva discriminante. Esta curva está parametrizada por $a(s) = \frac{s^3+4}{s^2}$, $b(s) = \frac{s^3+16}{4s}$. Entonces

$$\varphi(s) = \left(\frac{4(s^2+4)^2}{s(s+2)^2}\right)^{1/3} \tag{3.9}$$

da la imagen de la transformación de Landen Φ_6, es decir, $\Phi_6(a(s), b(s)) = (a(\varphi(s)), b(\varphi(s))$. La función Φ_6 tiene tres puntos fijos, a saber : $(3,3)$, que es superatractivo, un punto de silla P_2 en la rama inferior $\mathfrak{R}_-$ de la curva discriminante y un tercer punto inestable ubicado bajo esta rama. En Chamberland y Moll (2006) demostramos lo siguiente usando sólo técnicas dinámicas.

Teorema 3.11. *La rama inferior de la curva discriminante es* Λ_6. *Esta curva es, además, la variedad inestable global del punto de silla* P_2. *Se concluye que las iteraciones de* Φ_6 *que parten de* (a,b) *convergen si y sólo si la integral* U_6 *formada con los parámetros* (a,b) *es finita. Además,* $(a_n,b_n) \to (3,3)$ *cuadráticamente y existe un número* L *tal que* $(c_n,d_n,e_n) \to (1,2,1)L$.

Este resultado es la correspondencia perfecta del AGM para el caso racional.

Caso 2. La recta real. Primero se elige un número entero positivo m. Sea $R(x) = B(x)/A(x)$ una función racional. Suponemos que los coeficientes de A y B son reales, que A no tiene ceros reales y que $\deg(B) \leq \deg(A)-2$. Estas condiciones garantizan la existencia de la integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$. En particular, A debe ser de grado par. Escribimos $A(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^{p-k}$ y $B(x) = \sum_{k=0}^{p-2} b_k x^{p-2-k}$. También imponemos la condición $deg(dcm(A,B)) = 0$.

La clase de las funciones racionales que cumplen estas condiciones se llamará $\mathfrak{R}_p$. El algoritmo presentado la Sección 3.3 nos entrega una transformación de los parámetros $\mathfrak{P}_p := \{a_0,\, a_1, \cdots, a_p;\, b_0,\, b_1, \cdots, b_{p-2}\,\} = \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{p-1}$ de $R \in \mathfrak{R}_p$ que preserva la integral I. De hecho, hemos construido una familia de transformaciones, indexada por $m \in \mathbb{N}, \mathfrak{L}_{m,p} : \mathfrak{R}_p \to \mathfrak{R}_p$, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} t\mathfrak{L}_{m,p}(R(x))\, dx. \tag{3.10}$$

Estas transformaciones $\mathfrak{L}_{m,p}$ inducen una *transformación racional de Landen* en el espacio de parámetros, $\Phi_{m,p} : \mathfrak{P}_p \to \mathfrak{P}_p$ simplemente listando los coeficientes de la función $\mathfrak{L}_{m,p}(R(x))$. La integral original se escribe en la forma

$$I = \frac{b_0}{a_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{p-2} + b_0^{-1}b_1x^{p-3} + b_0^{-1}b_2x^{p-4} + \cdots + b_0^{-1}b_{p-2}}{x^p + a_0^{-1}a_1x^{p-1} + a_0^{-1}a_2x^{p-2} + \cdots + a_0^{-1}a_p}\, dx.$$

La transformación de Landen genera una sucesión de coeficientes

$$\mathfrak{P}_{p,n} := \{a_0^{(n)},\, a_1^{(n)}, \cdots, a_p^{(n)};\, b_0^{(n)},\, b_1^{(n)}, \cdots, b_{p-2}^{(n)}\,\}\ , \tag{3.11}$$

con $\mathfrak{P}_{p,0} = \mathfrak{P}_p$, tal como arriba. Uno espera que, cuando $n \to \infty$,

$$\mathbf{x}_n := \left(\frac{a_1^{(n)}}{a_0^{(n)}}, \frac{a_2^{(n)}}{a_0^{(n)}}, \cdots, \frac{a_p^{(n)}}{a_0^{(n)}}, \frac{b_1^{(n)}}{b_0^{(n)}}, \frac{b_2^{(n)}}{b_0^{(n)}}, \cdots, \frac{b_{p-2}^{(n)}}{b_0^{(n)}} \right) \tag{3.12}$$

converge a

$$\mathbf{x}_\infty := \left(0, \binom{q}{1}, 0, \binom{q}{2}, \cdots, \binom{q}{q}; 0, \binom{q-1}{1}, 0, \binom{q-1}{2}, \cdots, \binom{q-1}{q-1} \right)\ , \tag{3.13}$$

$q = p/2$. Además, se debe tener que

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_\infty\| \leq C\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_\infty\|^m. \tag{3.14}$$

La invariancia de la integral demuestra que

$$b_0^{(n)}/a_0^{(n)} \to 1/\pi I. \tag{3.15}$$

Esto produce un *método iterativo* para calcular la integral de una función racional. El orden de convergencia m es elegido por el usuario. La convergencia de estas iteraciones, y en especial la cota (3.14), puede establecerse por el argumento presentado en la sección 3.2.

Problema. Extender este algoritmo a una función arbitraria. Uno puede partir de aproximaciones de Pade.

La convergencia de una sucesión de vectores que tiende a 0 se mide en la norma de L_2,

$$\|v\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2p-2}} \left(\sum_{k=1}^{2p-2} \|v_k\|^2 \right)^{1/2}\ , \tag{3.16}$$

y también en la norma de L_∞,

$$\|v\|_\infty = \mathrm{Max}\,\{\|v_k\| : 1 \leq k \leq 2p-2\,\}\,. \tag{3.17}$$

Las funciones racionales que aparecen como integrandos tienen coeficientes racionales. Como medida de su complejidad hemos tomado el máximo número de dígitos de estos coeficientes. Esto aparece en la columna bajo la palabra *Porte*. Las tablas siguientes ilustran las iteraciones de transformaciones racionales de Landen de orden 2, 3 y 4, aplicadas al ejemplo

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x+5}{x^4+14x^3+74x^2+184x+208}\,dx = -\frac{7\pi}{12}.$$

La primera columna da el valor de la norma L_2 de $u_n - u_\infty$, la segunda entrega su norma L_∞, la tercera columna da el error relativo en (3.15) y la última columna presenta el porte del integrando. Como chequeo del algoritmo, verificamos en cada paso que la integral de la función racional es $-7\pi/12$.

n	norma L_2	norma L_∞	Error	Porte
1	58,7171	69,1000	1,02060	5
2	7,444927	9,64324	1,04473	10
3	4,04691	5,36256	0,945481	18
4	1,81592	2,41858	1,15092	41
5	0,360422	0,411437	0,262511	82
6	0,0298892	0,0249128	0,0189903	164
7	0,000256824	0,000299728	0,0000362352	327
8	$1{,}92454 \times 10^{-8}$	$2{,}24568 \times 10^{-8}$	$1{,}47053 \times 10^{-8}$	659
9	$1{,}0823 \times 10^{-16}$	$1{,}2609 \times 10^{-16}$	$8{,}2207 \times 10^{-17}$	1318

Tabla 1. Método de orden 2.

Como se espera, en el método de orden 2 se observa convergencia cuadrática. También observamos convergencia cuadrática en las normas L_2 y L_∞. El porte de los coeficientes se duplica en cada iteración.

n	norma L_2	norma L_∞	Error	Porte
1	15,2207	20,2945	1,03511	8
2	1,97988	1,83067	0,859941	23
3	0,41100	0,338358	0,197044	69
4	0,00842346	0,00815475	0,00597363	208
5	$5{,}05016 \times 10^{-8}$	$5{,}75969 \times 10^{-8}$	$1{,}64059 \times 10^{-9}$	626
6	$1{,}09651 \times 10^{-23}$	$1{,}02510 \times 10^{-23}$	$3{,}86286 \times 10^{-24}$	1878
7	$1{,}12238 \times 10^{-70}$	$1{,}22843 \times 10^{-70}$	$8{,}59237 \times 10^{-71}$	5634

Tabla 2. Método de orden 3.

n	norma L_2	norma L_∞	Error	Porte
1	7,44927	9,64324	1,04473	10
2	1,81592	2,41858	1,15092	41
3	0,0298892	0,0249128	0,0189903	164
4	$1{,}92454 \times 10^{-8}$	$2{,}249128 \times 10^{-8}$	$1{,}47053 \times 10^{-8}$	659
5	$3{,}40769 \times 10^{-33}$	$3{,}96407 \times 10^{-33}$	$2{,}56817 \times 10^{-33}$	2637

Tabla 3. Método de orden 4.

Terminamos con un problema completamente abierto.

Problema: Estudiar transformaciones de Landen en $[0, \infty)$ para funciones racionales que contengan un término impar.

Reconocimientos

Agradezco al Departamento de Matemáticas de la UCV por su amable invitación, en especial a Roberto Johnson. También debo agradecer a Luis Medina, estudiante de tesis de Tulane University, por su ayuda con la redacción. Este trabajo ha sido financiado parcialmente por la subvención DMS 0409968 de la National Science Foundation, USA.

Referencias

1. Amdeberhan, T., Manna, D. and Moll, V. (2007) The 2-adic valuation of a sequence arising from a rational integral. *INTEGERS*.
2. Apery, R. (1979) Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. *Asterisque*, **61**, 11–13.
3. Bierens de Haan, D. (1858) *Tables d'integrales définies*, 1e édition. C. G. Van der Post, Amsterdam.
4. Bierens de Haan, D. (1862) *Exposé de la théorie, des propriétés, des formules de transformation et des méthodes d'évaluation des integrales définies*, 1e édition. C. G. Van der Post, Amsterdam.
5. Boros, G. and Moll, V. (1999) An integral hidden in Gradshteyn and Ryzhik. *Jour. Comp. Applied Math.*, **106**, 361–368.
6. Boros, G. and Moll, V. (2000) A rational Landen transformation. The case of degree 6. *Contemporary Mathematics, Analysis, Geometry, Number Theory: The Mathematics of Leon Ehrenpreis*, **251**, 83–89. American Mathematical Society, edited by Knopp, G., Mendoza, E. T., Quinto, E. L., Grinberg, S., Berham, M.
7. Boros, G. and Moll, V. (2001) The double square root, Jacobi polynomials and Ramanujan's master theorem. *Jour. Comp. Applied Math.*, **130**, 337–344.
8. Boros, G. and Moll, V. (2004) *Irresistible Integrals*, 1st edition. Cambridge University Press, New York.
9. Boros, G., Moll, V. and Riley, S. (2005) An elementary evaluation of a quartic integral. *Scientia*, **11**, 1–12.
10. Boros, G., Moll, V. and Shallit, J. (2001) The 2-adic valuation of the coefficients of a polynomial. *Scientia*, **7**, 37–50.
11. Borwein, J. M. and Bailey, D. H. (2003) *Mathematics by Experiment: Plausible reasoning in the 21-st century*, 1st edition. A. K, Peters.
12. Borwein, J. M., Bailey, D. H. and Girgensohn (2004) *Experimentation in Mathematics: Computational Paths to Discovery*, 1st edition. A. K, Peters.

13. Borwein, J. M. and Borwein, P. B. (1987) *Pi and the AGM-A study in analytic number theory and computational complexity*, 1st edition. Wiley, New York.
14. Borwein, J. M. and Borwein, P. B. (1990) *A dictionary of real numbers*, 1st edition. Brooks Cole Publishing Co., California.
15. Bradley, D. (1998) *Representations of Catalan constant.* http://germain.umemat.maine.edu/faculty/bradley/papers/pub.html
16. Bronstein, M. (1997) *Symbolic Integration I. Transcendental functions*, Vol. 1 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag.
17. Chamberland, M. and Moll, V. (2006) Dynamics of the degree six Landen transformation. *Discrete and Dynamical Systems*, **15**, 905–919.
18. Cox, D., Little, J. and O'Shea, D. (1998) *Using Algebraic Geometry*, Vol. 1. Graduate Texts in Mathematics 185, Springer-Verlag.
19. Gourdon, X. and Sebah, P. (2002) *The Euler constant* γ.
20. Gourdon, X. and Sebah, P. (2003) *A collection of formulas for the Euler constant.*
21. Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. (2000) *Table of Integrals, Series and Products*, 6th edition. Academic Press, New York. Edited by Jeffrey, A. and Zwillinger, D.
22. Havil, J. (2003) *Gamma: exploring Euler's constant*, 1st edition. Princeton University Press.
23. Hubbard, J. and Moll, V. (2003) A geometric view of rational Landen transformation. *Bull. London Math. Soc.*, **35**, 293–301.
24. Klerer, M. and Grossman, F. (1968) Error rates in tables of indefinite integrals. *Indust. Math.*, **18**, 31–62.
25. Legendre, A. M. (1830) *Théorie des Nombres.* Firmin Didot Frères, Paris.
26. Lindman, C. F. (1891) *Examen des nouvelles tables d'integrales définies de M. Bierens de Hann.* P. A. Norstedt and Soner, Stockholm.
27. Little, J. (2005) On the zeroes of two families of polynomials arising form certain rational integrals. *Rocky Mountain Journal*, **35**, 1205–1216.
28. Manna, D. and Moll, V. (2007) Rational Landen transformations on $\mathbb{R}$. *Math. Comp.*
29. Manna, D. and Moll, V. (2007a) A simple example of a new class of Landen transformations. *Amer. Math. Monthly*, **11**, 232–244.
30. Prudnikov, A. P., Brychkov, A. and Marichev, O. I. (1992) *Integrals and Series.* Gordon and Breach Science Publishers.
31. Moll, V. (2002) The evaluation of integrals: a personal story. *Notices of the AMS*, **49**, 311–317.
32. Moll, V. (2006) The integrals in Gradshteyn and Ryzhik. Part 1: a family of logarithmic integrals. *Scientia*, **13**, 1–8.
33. Nemes, I., Petkovsek, M., Wilf, H. and Zeilberger, D. (1997) How to do MONTHLY problems with your computer. *Amer. Math. Monthly*, **104**, 505–519.
34. Osler, T. J. (1999) The union of Vieta's and Wallis' product for pi. *Amer. Math. Monthly*, **106**, 774–776.
35. Petkovsek, M., Wilf, H. and Zeilberger, D. (1996) $A = B$, 1st edition. A. K. Peters Ltd.
36. Sheldon, E. W. (1912) Critical revision of de Haan's Tables of Definite Integrals. *Amer. J. Math.*, **34**, 88–114.

37. Sondow, J. (1998) An antisymmetric formula for Euler's constant. *Math. Mag.*, **71**, 219–220.
38. Sondow, J. (2003) Criteria for the irrationality of Euler's constant. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **131**, 3335–3344.
39. Sondow, J. (2005) Double integrals for Euler's constant and $\ln 4/\pi$ and an analog of Hadjicosta's formula. *Amer. Math. Monthly*, **112**, 61–65.
40. Vieta, F. (1593) *Variorum de Rebus Mathematicis Responsorum*, Liber vii. En *Opera Omnia*, Vol. I, 436–446, Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1970.
41. Whittaker, E. T. and Watson, G. N. (1962) *Modern Analysis.* Cambridge University Press.
42. Wilf, H. S. and Zeilberger D. (1992) An algorithmic proof theory for hypergeometric (ordinary and "q") multi-sum/integral identities. *Inv. Math.*, **108**, 575–633.